11 ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР ЭЛЕМЕНТТЕРІ
11.1 Лаплас түрлендіруі. Түпнұсқалар мен олардың кескіндері

Операциялық есептеулер инженерлік жүйелерде қолданбалы есептерді шешуде, атап айтсақ, автоматтандыру жүйесі мен телемеханикада маңызды рөл атқарады.

Операциялық есептеу – математикалық талдаудың дифференциалдық және интегралдық операторларды зерттеуді және осы операторларға қатысты теңдеулерді шешуді қарапайым алгебралық есептерді қарастыруға келтіретін әдістерінің бірі.

Операциялық есептеулердің әдістері есепті шешудің келесі шартты схемасын іске асыруды болжайды:

1. ізделінді функциялардан басқа фунцияларға - олардың бейнелеріне (кескіндеріне) көшу;
2. функцияларға қолданылатын амалдарды бейнелерге жүргізу;
3. бейнелерге қолданған амалдар нәтижесін ала отырып, функциялардың өздеріне (түпнұсқаларға) қайтып оралу.

Функциялардан олардың кескіндеріне көшу үшін *Лаплас түрлендіруі* деп аталатын түрлендіруді қолданамыз.

Операциялық есептеулердің негізгі алғашқы ұғымдары түпнұсқа-функциялары мен кескін – функциялары болып табылады.

$f(t)$ нақты t айнымалысынан тәуелді нақты мәнді функциясы (нақты функция) болсын (t уақыт немесе координата).

Анықтама 31. Егер $f(t)$ функциясы:

1. $t<0$ үшін $f(t)=0$ болады;
2. $[t;+\infty)$ аралығында $f(t)$ бөлік-үзіліссіз, яғни функция үзіліссіз немесе тек I текті үзіліс нүктелеріне ие бола алады, әрі t өсінің әрбір шектелген аралықтарында бұндай нүктелер саны шектеулі болады;
3. кез келген t үшін $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$ шартын қанағаттандыратын $M>0$ және $s_0\ge 0$ сандары табылады, яғни t өскенде $f(t)$ функциясының өсу жылдамдығы қандайда бір көрсеткіштік функцияның өсу жылдамдығынан артпайды (s_0 саны $f(t)$ функциясының *өсу көрсеткіші* деп аталады)

деген шарттарды қанағаттандыратын болса, онда ол *түпнұсқа* деп аталады.

1-3 шарттары әртүрлі физикалық үрдістерді сипаттайтын көптеген функциялар үшін орындалады.

Бірінші шарт үрдістің белгілі бір уақыт сәтінде басталатынын білдіреді; әдетте $t=0$ сәтінде деп есептеу қолайлы. Мысалы үшін, үшінші шартты шектелген және (олар үшін $s_0=0$ деп алуға болады) t^n, $n>0$ дәрежелік функциялар қанағаттандырады. Бұл шартты қанағаттандырмайтын функция ретінде $f(t)=\alpha e^{t^2}$ функциясын келтіруге болады.

Ескерту: $f(t)$ функциясы нақты айнымалы комплекс мәнді функция да болуы, яғни $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$ түрінде жазылуы мүмкін. Егер $f_1(t)$, $f_2(t)$ нақты функциялары түпнұсқалар болса, онда $f(t)$ функциясы түпнұсқа деп саналады.

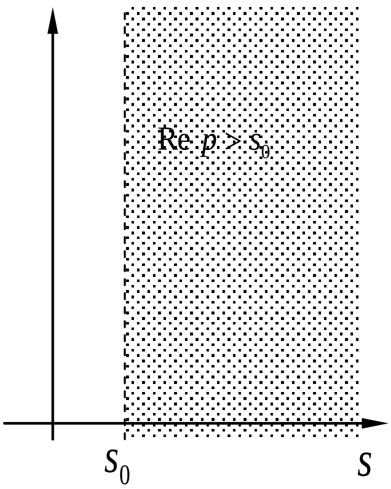
Анықтама 32. $f(t)$ түпнұсқасының *кескіні* деп

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad (11.1)$$

интегралдық түрінде анықталған $p=s+i\sigma$ комплекс айнымалысынан тәуелді $F(p)$ функциясын айтамыз.

$f(t)$ түпнұсқасынан $F(p)$ кескініне өту амалы, яғни (6.1) теңдігінің оң жағындағы интеграл $f(t)$ функциясының *Лаплас түрлендіруі* деп аталады. $f(t)$ түпнұсқасы мен $F(p)$ кескінінің арасындағы сәйкестік $f(x)\div F(p)$ немесе $F(p)\div f(x)$ түрінде жазылады (түпнұсқаларды кіші, ал кескіндерді бас әріптермен белгілеу келісілген).

Теорема 13 (кескіннің болуы). Егер s_0 саны $f(t)$ түпнұсқасының өсу көрсеткіші болса, онда $\operatorname{Re} p=s>s_0$ жарты жазықтығында оның $F(p)$ кескіні бар болады және ол осы жарты жазықтықта аналитикалық функция болады (8-сурет).



8-сурет

Салдар (кескіннің болуы қажетті шарты). Егер $F(p)$ функциясы $f(t)$ түпнұсқасының кескіні болса, онда

$$\lim_{p\to\infty} F(p)=0.$$

Мысалы, $F(p)=5,\ F(p)=p^2$ функциялары үшін аталған қажетті шарт орындалмайды, сондықтан, жоғарыдағы салдар бойынша бұл функциялар ешбір түпнұсқа үшін кескін бола алмайды.

$F(p)$ функциясының $\operatorname{Re} p=s>s_0$ аналитикалық болуынан оның барлық айрықша нүктелерінің $\operatorname{Re} p=s=s_0$ түзуінің бойында немесе оның сол жағында жататындығы шығады. Бұл шартты қанағаттандырмайтын $F(p)$ функциясы кескін бола алмайды.

Мысалы, $F(p)=tg\,p$ функциясы кескін бола алмайды, себебі, оның айрықша нүктелері барлық s өсінде орналасқан.

Теорема 14 (түпнұсқаның жалғыз болуы). Егер $F(p)$ функциясы $f_1(t)$ және $f_2(t)$ түпнұсқаларының кескіні болса, онда бұл түпнұсқалар екеуі де үздіксіз болатын нүктелерде бір біріне тең болады.

Ескерту: Кейіннен түпнұсқа - функциясын,

$$f(t)=\begin{cases} f(t), & \text{егер } t\ge 0,\\ 0, & \text{егер } t<0\end{cases}$$

екенін ескере отырып, қысқаша $f(t)$ түрінде жазамыз.

$f(t)=t$ функциясының кескіні

$$F(p)=\frac{1}{p^2}, \text{ яғни } t\div\frac{1}{p^2} \qquad (11.2)$$

болатынын көрсетуге болады.

Ескерту: $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$ функциясы, (11.1) интегралы жинақты болатын $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a$ жарты жазықтығында ғана емес, p комплекс жазықтығының $p=a$ нүктесінен басқа барлық нүктелерінде аналитикалық болады. Бұндай ерекшелік басқа да көптеген кескіндерде де байқалады. Біз үшін, осыдан осылай, кескіннің (11.1) түріндегі интегралдық өрнектелуі орынды болатын облыстан гөрі кескіннің өзі маңызды болады.

11.2 Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері

Кескінді оның анықтамасын ғана қолданып табу үнемі оңай және қолайлы бола бермейді. Лаплас түрлендірулерінің қасиеттері көптеген функциялар үшін олардың кескіндерін, сондай-ақ олардың кескіндері бойынша түпнұсқаларын табу есептерін әлдеқайда жеңілдетеді.

Сызықтылық

Егер $f_1(t)\div F_1(p)$, $f_2(t)\div F_2(p)$ және c_1, c_2 тұрақты сандар болса, онда $c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\div c_1F_1(p)+c_2F_2(p)$ болады, яғни түпнұсқаның сызықтық комбинациясына кескіннің тура сондай сызықтық комбинациясы сәйкес келеді.

Интегралдың қасиетін қолдансақ

$$\int_0^\infty (c_1\cdot f_1(t)+c_2\cdot f_2(t))e^{-pt}dt=c_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt+c_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt=c_1F_1(p)+c_2F_2(p).$$

$\sin\omega t, \cos\omega t$ (ω - кез келген сан), $c\,(const), ch\omega t, sh\omega t$ функцияларының кескіндерін қарастырайық. Сызықтылық қасиетін және

$$e^{at}\div\frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a) \qquad (11.3)$$

формуласын қолданып

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

екенін, яғни

$$\sin\omega t\div\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \tag{11.4}$$

болатынын аламыз. Сол сияқты

$$\cos\omega t\div\frac{p}{p^2+\omega^2} \tag{11.5}$$

формуласын аламыз.

$1\div\frac{1}{p}$ болғандықтан $c=c\cdot 1\div c\cdot\frac{1}{p}$, яғни

$$c\div\frac{c}{p}$$

болады. $e^{at}\div\frac{1}{p-a}$ болғандықтан

$$ch\,\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}=\frac{1}{2}e^{\omega t}+\frac{1}{2}e^{-\omega t}\div\frac{1}{2}\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+\omega}=\frac{p}{p^2-\omega^2},$$

яғни

$$ch\,\omega t\div\frac{p}{p^2-\omega^2}. \tag{11.6}$$

болады. Сәйкесінше

$$sh\,\omega t\div\frac{\omega}{p^2-\omega^2} \tag{11.7}$$

формуласын аламыз.

Ұқсастық

Егер $f(t)\div F(p)$ және $\lambda>0$ болса, онда $f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, яғни түпнұсқаның аргументін λ оң санына көбейту кескін мен оның аргументін осы санға бөлуге келтіреді.

(11.1) формуласы бойынша

$$f(\lambda t)\div\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=[\lambda t=\tau]=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Мысалы үшін, $\cos t\div\frac{p}{p^2+1}$. Онда $\cos\omega t\div\frac{1}{\omega}\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Жылжыту

Егер $f(t) \div F(p)$ және $a = const$ болса, онда $e^{at} \cdot f(t) \div F(p-a)$, яғни түпнұсқаның e^{at} функциясына көбейтілуі p айнымалысының жылжуына әкеледі.

(11.1) формуласы бойынша

$$e^{at} \cdot f(t) \div \int_0^\infty e^{at} \cdot f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a), \quad (\mathrm{Re}(p-a) > s_0).$$

Осы қасиетке сүйеніп түпнұсқалар мен кескіндердің сәйкестілігін көрсететін кестені кеңейтіп жазуға болады:

$$e^{at} \cdot \sin \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2};$$

$$e^{at} \cdot \cos \omega t \div \frac{p - a}{(p-a)^2 + \omega^2};$$

$$e^{at} \cdot \mathrm{sh}\ \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2};$$

$$e^{at} \cdot ch\ \omega t \div \frac{p - a}{(p-a)^2 - \omega^2}.$$

Кешігу

Егер $f(t) \div F(p), \quad \tau > 0$ болса, онда $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$, яғни түпнұсқаның τ оң шамасына кешігуі түпнұсқаның кешігусіз кескінінің $e^{-p\tau}$ шамасына көбейтілуіне әкеледі.

$t - \tau = t_1$ деп алсақ, онда

$$f(t-\tau) \div \int_0^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = \int_0^\infty f(t_1) e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p).$$

«Кешігу» ұғымын түсіндіріп кетейік. $f(t-\tau)$ функциясының графигін $f(t)$ функциясының графигін τ бірлігіне оңға жылжыту арқылы алуға болады (9-сурет). Сондықтан, $f(t)$ және $f(t-\tau)$ функциялары бір үрдісті сипаттайды, бірақ $f(t-\tau)$ функциясы сипаттайтын үрдіс τ уақытына кешігіп басталады.

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{егер } t \ge \tau, \\ 0, & \text{егер } t < \tau \end{cases}$$

функциясы *жалпыланған бірлік (Хевисайд) функция* деп аталады (10-сурет). Кейіннен мысалда

$$1(t) \div \frac{1}{p}$$

болатыны көрсетіледі, онда

$$1(t-\tau) \div \frac{1}{p} e^{-p\tau}.$$

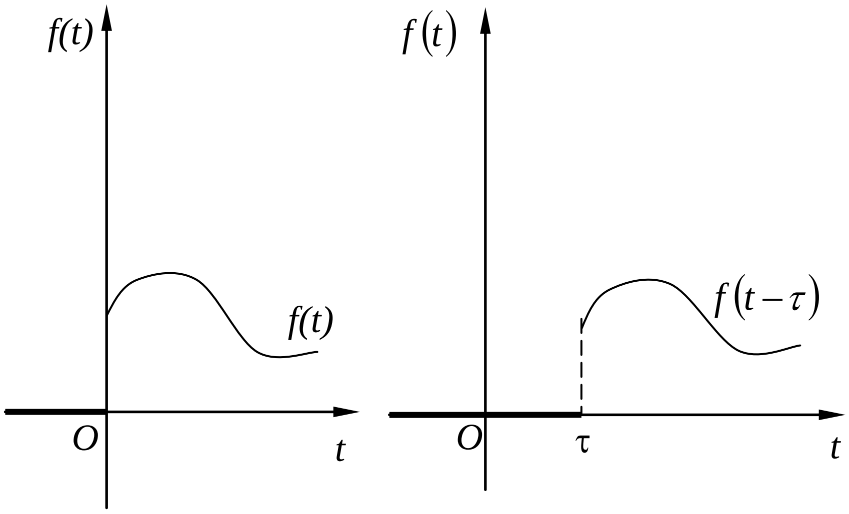
Кешігулі

$$g(t)=\begin{cases} f(t-\tau), & \text{егер } t \geq \tau, \\ 0, & \text{егер } t < \tau \end{cases}$$

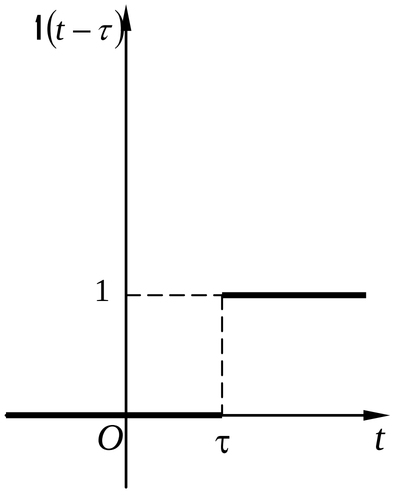
функциясын

$$g(t)= f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$$

түрінде жазуға болады.



9-сурет



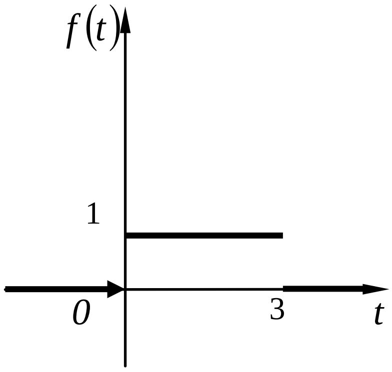
10-сурет

Кешігу қасиеті импульстік, құрамдас (әртүрлі аралықтарда әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілген) және периодты функциялардың кескіндерін табуда қолданылады. Енді соларға тоқталайық.

Бірлік импульстің кескіні

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{егер } \ t<0, \\ 1, & \text{егер } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{егер } \ t>1. \end{cases}$$

бірлік импульсінің кескінін табайық. Хевисайдтың $1(t)$ бірлік және $1(t-1)$ жалпы бірлік функциялары арқылы $f(t)$ функциясын $f(t)=1(t)-1(t-1)$ айырмасы түрінде қарастыруға болады (11-сурет).



11-сурет

Олай болса, кешігу қасиеті мен сызықтық қасиеттері бойынша

$$f(t)=1(t)-1(t-3)\div\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-p}=F(p).$$

Кешігулі тікбұрышты импульстің кескіні

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{егер}\quad t<T,\\ c, & \text{егер}\quad a\le t\le a+b,\\ 0, & \text{егер}\quad t>a+b.\end{cases}$$

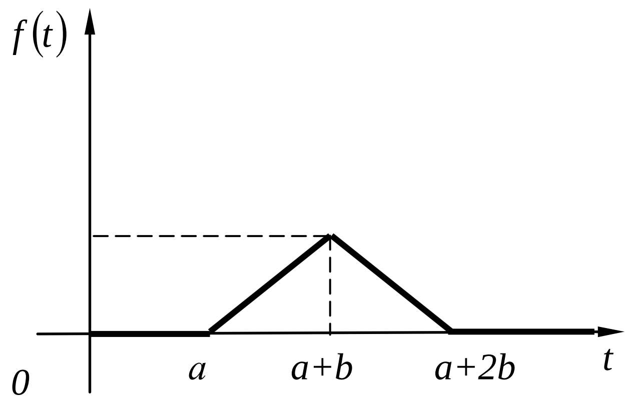
Кешігулі тікбұрышты импульстің кескінін табайық. Бұл арада

$$f(t)=c[i(t-a)-i(t-(a+b))]\div b\left(\frac{e^{-pa}}{p}-\frac{e^{-p(a+b)}}{p}\right)=\frac{be^{-pa}\left(1-e^{-bp}\right)}{p}.$$

Үшбұрышты импульстің кескіні

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{егер}\quad a\le t<a+b,\\ \frac{c}{b}(t-a), & \text{егер}\quad a+b\le t<a+2b,\\ \frac{c}{b}(t-a-2b), & \text{егер}\quad a+b\le t\le a+2b,\\ 0, & \text{егер}\quad t>a+2b\end{cases}$$

үшбұрышты импульстің кескінін табайық. Түпнұсқа-функциясының графигін көрсетейік (12-сурет).



12-сурет

Бұл функцияны

$$f(t)=\frac{c}{b}(t-a)i(t-a)+\left[-\frac{c}{b}(t-a-2b)-\frac{c}{b}(t-a-b)\right]i(t-a-b)+\left[0-\left(-\frac{c}{b}(t-a-2b)\right)\right]i(t-a-2b)=$$

$$=\frac{c}{b}(t-a)i(t-a)-\frac{2b}{b}(t-a-b)+\frac{b}{a}(t-a-2b)i(t-a-2b)$$

түрінде жазып алып, $t\div\frac{1}{p^2}$ және $(t-\tau)i(t-\tau)\div\frac{e^{-\tau p}}{p^2}$ сәйкестерін ескере отырып $f(t)$ функциясының кескінін аламыз:

$$f(t) \div \frac{c}{b}\frac{e^{-a\,p}}{p^2} - \frac{2c}{b}\frac{e^{-(a+b)\,p}}{p^2} + \frac{c}{b}\frac{e^{-(a+2b)\,p}}{p^2} = \frac{c}{b}e^{-a\,p}\frac{\left(1-e^{b\,p}\right)^2}{p^2}.$$

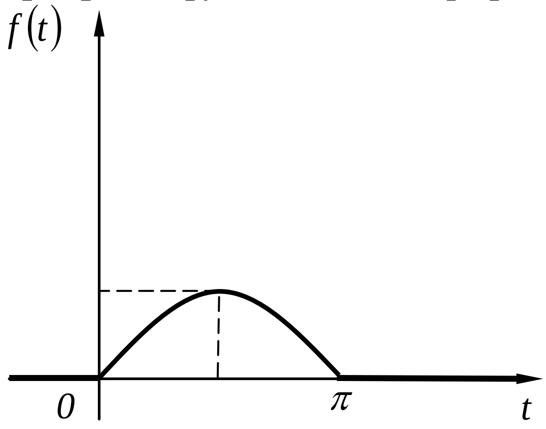
Синусоидалық импульс

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad t < 0, \\ \sin t, & \text{егер} \quad 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{егер} \quad t > \pi \end{cases}$$

синусоидалық импульстің кескінін табайық.

$$f(t) \div \sin t \cdot i(t) + \sin(t-\pi)\cdot i(t-\pi) \div \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi\,t}}{p^2+1} = \frac{1+e^{-\pi\,t}}{p^2+1}.$$

Түпнұсқа - функциясының графигін көрсетейік (13-сурет).



13-сурет

Құрамдас функцияның кескіні

Құрамдас функция деп анықталу облысының әртүрлі аралықтарында әртүрлі аналитикалық өрнектермен берілген

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad t < t_0 = 0, \\ f_1(t), & \text{егер} \quad t_0 \le t < t_1, \\ f_2(t), & \text{егер} \quad t_1 \le t < t_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_{n-1}(t), & \text{егер} \quad t_{n-2} \le t < t_{n-1}, \\ f_n(t), & \text{егер} \quad t \ge t_{n-1} \end{cases} \tag{11.8}$$

түріндегі функцияны айтамыз. Бұл функцияны Хевисайд функциясы арқылы бір аналитикалық өрнек түрінде жазуға болады:

$$f(t) = f_1(t)\cdot i(t) + \left[f_2(t) - f_1(t)\right]i(t-t_1) + \left[f_3(t) - f_2(t)\right]i(t-t_2) + \dots + \left[f_n(t) - f_{n-1}(t)\right]i(t-t_{n-1}) =$$
$$= f_1(t)\cdot\left(i(t) - i(t-t_1)\right) + f_2(t)\cdot\left[i(t-t_1) - i(t-t_2)\right] + \dots + f_{n-1}(t)\left[i(t-t_{n-2}) - i(t-t_{n-1})\right] + f_n(t)i(t-t_{n-1}) =$$
$$= f_1(t)\cdot\left(i(t) - i(t-t_1)\right) + f_2(t)\cdot\left[i(t-t_1) - i(t-t_2)\right] + \dots + f_{n-1}(t)\left[i(t-t_{n-2}) - i(t-t_{n-1})\right] + f_n(t)i(t-t_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t)[i(t-t_{k-1})-i(t-t_k)]+f_n(t)i(t-t_{n-1}).$$

Сонымен (11.8) құрамдас функциясын

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n-1} f_k(t)[i(t-t_{k-1})-i(t-t_k)]+f_n(t)i(t-t_{n-1}) \qquad (11.9)$$

түріндегі жазылуын алдық. Бұл жазылудан сызықтық және кешігу қасиеттері бойынша (6.8) функциясының кескінін табамыз.

Периодты функцияның кескіні

$[0;+\infty)$ аралығында T - периодты $f(t)$ функциясының кескінін табайық. $f(t)$ функциясын оның бірінші периодын сипаттайтын

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t), & \text{егер} \quad 0\le t\le T, \\ 0, & \text{егер} \quad t>T \end{cases}$$

функциясы мен Хевисайд функциясы арқылы жазып аламыз:

$$f(t)=f_1(t)\cdot i(t)+f_1(t-T)i(t-\eta)+f_1(t-2T)i(t-2T)+\ldots+f_1(t-nT)i(t-nT)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)i(t-nT),$$

Бұдан, сызықтық қасиеті мен

$$f_1(t)\div F_1(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt=\int_0^{T} e^{-pt} f_1(t)dt.$$

сәйкестігі негізінде,

$$f(t)\div F_1(p)+F_1(p)e^{-pT}+F_1(p)e^{-2pT}+\ldots.+F_1(p)e^{-npT}+\ldots=F_1(p)(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+\ldots+e^{-npT}+\ldots)=F_1(p)\frac{1}{1-e^{-pT}}.$$

сәйкестігін аламыз.

Сонымен T - периодты $f(t)$ функциясы үшін

$$f(t)\div\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}, \text{ мұндағы } \quad F_1(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt. \qquad (11.10)$$

Ескерту: Лаплас түрлендіруінің

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^{\tau} f(t)e^{-pt}dt\right)$$

түріндегі қасиеті *озықтық қасиеті* деп аталады. Бұл қасиет сирек қолданылады.